

Intro

Syntactische objecten uit de formele taal (zoals termen en formules) op zichzelf betekenen nog niet: ze moeten van geval to geval geïnterpreteerd worden.



Definities

Structuur

Een *structuur* \mathbf{D} is een drietal $\langle \mathbf{D}, \mathbf{R}, \mathbf{O} \rangle$ bestaande uit een niet-lege verzameling D (het domein), een verzameling \mathbf{R} van relaties op D en een verzameling \mathbf{O} van operaties op D .

Structuur: Bestaat uit een *domein* waarop mogelijk *relaties* of *operaties* gedefinieerd zijn. Een structuur kan zowel *eindig* als *oneindig* zijn.

Relationele structuur: Bestaat uit een *domein* D van objecten met daarop één of meer *relaties*.

Operationele structuur: Bestaat uit een domein D met daarop één of meer *operaties* (*functies*).

Interpretatiefunctie

Laat $\mathbf{D} = \langle D, \mathbf{R}, \mathbf{O} \rangle$ een structuur zijn. Een interpretatiefunctie I kent aan elke individuele constante c uit predikaatlogische taal een speciaal object $I(c) \in \mathbf{O}$ toe,

Model: een paar (\mathbf{D}, I) . Een (on)eindig model is een model met een (on)eindig domein.

Bedeling: Een *bedeling* b is een functie die aan elke variabele x een object $b(x) \in \mathbf{D}$ toekent.

Waardering van termen

Laat $M = (\mathbf{D}, I)$ een model zijn en b een bedeling. De semantische waarden van termen zijn als volgt inductief gedefinieerd:

1. $V_{M,b}(x) = b(x)$, voor variabelen x
(Lees: de interpretatie - waard, value - van variabele x in model M onder bedeling b is $b(x)$)
2. $V_{M,b}(a) = I(a)$, voor individuele constanten a .
3. $V_{M,b}(f(t_1, \dots, t_k)) = I(f)(V_{M,b}(t_1), \dots, V_{M,b}(t_k))$

Bv.: $V_{M,b}(f(a, x)) = I(f)(I(a), b(x)) = +(0,1) = 1$

Als de waarde 1 is, is het gebruikelijker om $M, b \models \varphi$ te schrijven dan om $V_{M,b}(\varphi) = 1$ te schrijven.

Waardering van formules

Laat $M = (\mathbf{D}, I)$ een model zijn en b een bedeling. $M, b \models \varphi$ wordt uitgesproken als ' φ is waar in M onder b '.

$M, b \models \varphi \Leftrightarrow V_{M,b}(\varphi) = 1$, en $M, b \not\models \varphi \Leftrightarrow V_{M,b}(\varphi) = 0$.

De waarheidswaarden van formules ontstaan als volgt:

1. $M, b \models P(t_1, \dots, t_m) \Leftrightarrow I(P)(V_{M,b}(t_1), \dots, V_{M,b}(t_m))$
2. $M, b \models \neg \varphi \Leftrightarrow M, b \not\models \varphi$
3. $M, b \models \exists x \varphi \Leftrightarrow \text{er is een } d \in D \text{ zodat } M, b[x?d] \models \varphi$

4. $M, b \models x$ voor alle $d \in D$ geldt $M, b[x \mapsto d] \models \varphi$